

ΛΥΣΗ

α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ η υποτείνουσα $ΑΛ = ρ = 2$ και η $ΛΟ = 1$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $ΟΑ^2 = ΑΛ^2 - ΛΟ^2$ ή $ΟΑ^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ ή $ΟΑ = \sqrt{3}$.

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ η υποτείνουσα $ΑΚ = R$ και η $ΚΟ = \sqrt{3}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα και λόγω του ερωτήματος (i) είναι

$$ΑΚ^2 = ΚΟ^2 + ΟΑ^2 \text{ ή } R^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6 \text{ ή } R = \sqrt{6}.$$

β) Η ευθεία ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής, άρα το Ο είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε $ΑΒ = 2 \cdot ΟΑ$ ή $ΑΒ = 2\sqrt{3}$.

i) Επειδή $ΑΒ = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} = \sqrt{2 \cdot 6} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2}$, η ΑΒ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_1 , άρα η κεντρική του γωνία είναι $\widehat{ΑΚΒ} = 90^\circ$.

Εναλλακτικά: Είναι $ΟΚ = ΟΑ = \sqrt{3}$, άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{ΑΚΟ} = 45^\circ$. Επειδή η ΚΟ διχοτομεί την $\widehat{ΑΚΒ}$ είναι $\widehat{ΑΚΒ} = 90^\circ$.

Ο κυκλικός τομέας $\widehat{ΚΑΒ}$ είναι γωνίας $\mu = \widehat{ΑΚΒ} = 90^\circ$ και ακτίνας $R = \sqrt{6}$, οπότε το

$$\text{εμβαδόν του είναι } (\widehat{ΚΑΒ}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi (\sqrt{6})^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{3\pi}{2}.$$

Επειδή $ΑΒ = 2\sqrt{3} = \rho\sqrt{3}$, η ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_2 , άρα η κεντρική του γωνία είναι $\widehat{ΑΛΒ} = 120^\circ$.

Εναλλακτικά: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ η υποτείνουσα $ΑΛ = 2$ και η $ΛΟ = 1 = \frac{ΑΛ}{2}$, άρα

$\widehat{ΟΑΛ} = 30^\circ$, οπότε $\widehat{ΑΛΟ} = 60^\circ$. Επειδή η ΛΟ διχοτομεί την $\widehat{ΑΛΒ}$ είναι $\widehat{ΑΛΒ} = 120^\circ$.

Ο κυκλικός τομέας $\widehat{ΛΑΒ}$ είναι γωνίας $\mu = \widehat{ΑΛΒ} = 120^\circ$ και ακτίνας $\rho = 2$, οπότε το

$$\text{εμβαδόν του είναι } (\widehat{ΛΑΒ}) = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi}{3}.$$

ii) Αν $(ΚΑΒ)$ και $(ΛΑΒ)$ είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΚΑΒ και ΛΑΒ τότε το εμβαδόν Ε του σκιασμένου μηνίσκου θα είναι $E = (\widehat{ΛΑΒ}) - (\widehat{ΚΑΒ}) + (ΚΑΒ) - (ΛΑΒ)$.

$$\text{Είναι } (ΚΑΒ) = \frac{ΚΑ \cdot ΚΒ}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = 3 \text{ και } (ΛΑΒ) = \frac{ΑΒ \cdot ΛΟ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \sqrt{3}.$$

Επίσης από το β)i), $(\widehat{ΚΑΒ}) = \frac{3\pi}{2}$ και $(\widehat{ΛΑΒ}) = \frac{4\pi}{3}$, επομένως έχουμε

$$E = \frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} + 3 - \sqrt{3} \text{ ή } E = 3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$