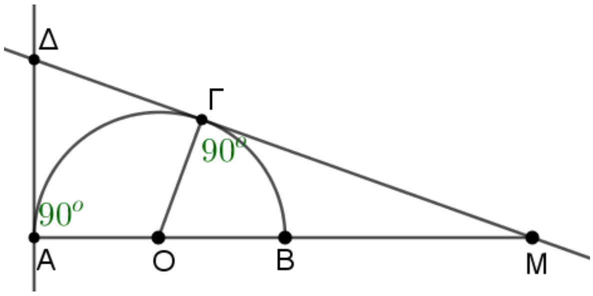
ΛΥΣΗ

α)



Το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΓ.

ΜΟ = ΜΒ+ΒΟ = 2ρ+ρ = 3ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2$, άρα $\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2$, δηλαδή ΜΓ = $2\sqrt{2}\rho$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΑΔΜ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα: $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} = 90^o$ και την γωνία $\widehat{\mathrm{M}}$ κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma}$	Μ κοινή	$\hat{\mathrm{O}} = \hat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΜΓ	ΜΟ	ΟΓ	ΜΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΜ	ΜΔ	ΔΑ	ΜΑ

$\dfrac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MO}} = \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}}$ ή $\dfrac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MA}} = \dfrac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M\Gamma}}$.

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΟΜΓ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$\dfrac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})} = \left(\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{\Gamma M}}\right)^2 = \dfrac{\mathrm{AM}^2}{\mathrm{\Gamma M}^2}$. (1)

ΟΜ = ΜΒ+ΒΟ = λρ+ρ = (λ+1)ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma M}^2$, άρα

$$\mathrm{\Gamma M}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = \left((\lambda+1)\rho\right)^2 - \rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1\right)\rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda\right)\rho^2.$$

ΑΜ = 2ρ+λρ= (λ+2)ρ.

Η (1) γίνεται $\dfrac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{MO\Gamma})} = \dfrac{\mathrm{AM}^2}{\mathrm{\Gamma M}^2} = \dfrac{(\lambda+2)^2\rho^2}{\left(\lambda^2+2\lambda\right)\rho^2} = \dfrac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda+2)} = \dfrac{\lambda+2}{\lambda}$.

Αφού (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ) θα έχουμε $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΜΟΓ})} = \frac{9(\text{ΜΟΓ})}{(\text{ΜΟΓ})} = 9$ και επομένως $\frac{\lambda + 2}{\lambda} = 9$ ή

$\lambda + 2 = 9\lambda$ ή 8λ =2, άρα λ = $\frac{1}{4}$.