ΛΥΣΗ

α) Το κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R και η πλευρά του είναι $λ_6$ = R. Το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου δίνεται από τον τύπο:

$E_6 = \frac{1}{2} \cdot P_6 \cdot α_6$, όπου P_6 η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου, άρα $P_6 = 6\ λ_6 = 6\ R$

και $α_6$ το απόστημα του κανονικού εξαγώνου, δηλαδή $α_6 = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$. Το εμβαδόν θα ισούται με: (ΑΒΓΔΕΖ) $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot λ_6 \cdot α_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot R \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

β) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,R) και ισχύει ΑΔ = 2R. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΔ αφού η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Η κάθετη πλευρά ΓΔ ισούται με $λ_6$=R. Από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΑΔ^2 = ΑΓ^2 + ΓΔ^2$ ή $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 - ΓΔ^2$ ή $ΑΓ^2 = (2R)^2 - R^2$ ή

$ΑΓ^2 = 4\,R^2 - R^2$ ή $ΑΓ^2 = 3\,R^2$ ή $ΑΓ = R \cdot \sqrt{3}$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ισούται με: (ΑΓΔ)$= \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΓΔ = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{3} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Η ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΓΔ συνεπώς ξέρουμε ότι χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή: (ΑΜΔ) = (ΑΜΓ) $= \frac{(ΑΓΔ)}{2} = \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ) (ΑΜΔΕΖ) = (ΑΔΕΖ) + (ΑΜΔ) Αλλά το εμβαδόν του ΑΔΕΖ ισούται με το μισό του εμβαδού του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, δηλαδή (ΑΔΕΖ) $= \frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

και από το β) έχουμε: (ΑΜΔ) $= \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$,

(ΑΜΔΕΖ) = (ΑΔΕΖ) + (ΑΜΔ) $= \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\,R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$