ΘΕΜΑ 4

4.1. Η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma}} \ (1)$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

Η ένταση του Βαρυτικού Πεδίου στην επιφάνεια της Γης είναι ίση με:

$$g_o = G \cdot \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}, \ g_o \cdot R_\Gamma^2 = G \cdot M_\Gamma \ (2)$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

Αντικαθιστούμε στην (1) τη (2) και έχουμε:

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma}}, \ \upsilon_\delta = \sqrt{2 \cdot g_o \cdot R_\Gamma} \ (3)$$

Συνεπώς, με αντικατάσταση στην (3) προκύπτει:

$$\upsilon_\delta = \sqrt{2 \cdot 10 \ \frac{m}{s^2} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \ m}, \ \upsilon_\delta = 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \ \frac{m}{s}$$

(<u>Μονάδες 4</u>)

Μονάδες 6

4.2. Το δυναμικό στην επιφάνεια της Γης είναι ίσο με:

$$V_o = -G \cdot \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma},$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

$$V_o = -\frac{g_o . R_\Gamma^2}{R_\Gamma}, \ V_o = -g_o \cdot R_\Gamma, \ V_o = -6{,}4 \cdot 10^7 \frac{J}{Kg}$$

(<u>Μονάδες 2</u>)

Το δυναμικό στο σημείο Α στο ύψος $h = R_\Gamma$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_A = -G \cdot \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h},$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

$$V_A = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + R_\Gamma}, \ V_A = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{2 \cdot R_\Gamma}, \ V_A = -\frac{g_o \cdot R_\Gamma}{2}, \ V_A = -3{,}2 \cdot 10^7 \frac{J}{Kg}$$

(<u>Μονάδες 2</u>)

Μονάδες 6

4.3. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος από την επιφάνεια της Γης μέχρι το ύψος h

$$K_A - K_o = W$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_1^2 = m\cdot (V_o - V_A),$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

$$\frac{1}{2}\cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\cdot \upsilon_1^2 = (V_o - V_A)\,,\ \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 = 2\cdot (V_o - V_A),$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2\cdot (V_o - V_A)\,,\ \upsilon_2^2 = \left(\frac{3}{4}\cdot \upsilon_\delta\right)^2 + 2\cdot (V_o - V_A)\,,\ \upsilon_2^2 = \frac{9}{16}\cdot \upsilon_\delta^2 + 2\cdot (V_o - V_A)$$

Και με αντικατάσταση προκύπτει: $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{9}{16}\cdot 128\cdot 10^6 + 2\cdot (-3{,}2\cdot 10^7)}\ \frac{m}{s}$,

$$\upsilon_2 = 2\cdot \sqrt{2}\cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

(<u>Μονάδες 4</u>)

Μονάδες 6

4.4. Εφόσον το βαρυτικό πεδίο είναι διατηρητικό, η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων (Γη και σώμα) διατηρείται. Επομένως κατά την κίνηση του σώματος μεταξύ δύο θέσεων θα ισχύει

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

Στο μέγιστο ύψος h_{max} θα είναι $K_2 = 0$, συνεπώς:

(<u>Μονάδα 1</u>)

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_1^2 + \left(-G\cdot \frac{M_\Gamma\cdot m}{R_\Gamma}\right) = 0 + \left(-G\cdot \frac{M_\Gamma\cdot m}{R_\Gamma + h_{max}}\right)$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

Όμως, $g_o\cdot R_\Gamma^2 = G\cdot M_\Gamma$ και με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2}\cdot \upsilon_1^2 - \frac{g_o\cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = -\frac{g_o\cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}}\,,\ \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}\cdot \upsilon_\delta^2 - \frac{g_o\cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = -\frac{g_o\cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}\cdot 2\cdot g_o\cdot R_\Gamma - g_o\cdot R_\Gamma = -\frac{g_o\cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}},$$

$$\frac{9}{16}\cdot g_o\cdot R_\Gamma - g_o\cdot R_\Gamma = -\frac{g_o\cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}}\,,\ -\frac{7}{16}\cdot g_o\cdot R_\Gamma = -\frac{g_o\cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_{max}}\,,$$

$$\frac{7}{16}\cdot g_o = \frac{g_o\cdot R_\Gamma}{R_\Gamma + h_{max}} \rightarrow$$

$$h_{max} = \frac{9\cdot R_\Gamma}{7}$$

(<u>Μονάδες 3</u>)

Και με αντικατάσταση:

$$h_{max} \cong 8{,}23\cdot 10^6\ m$$

(<u>Μονάδα 1</u>)

Μονάδες 7