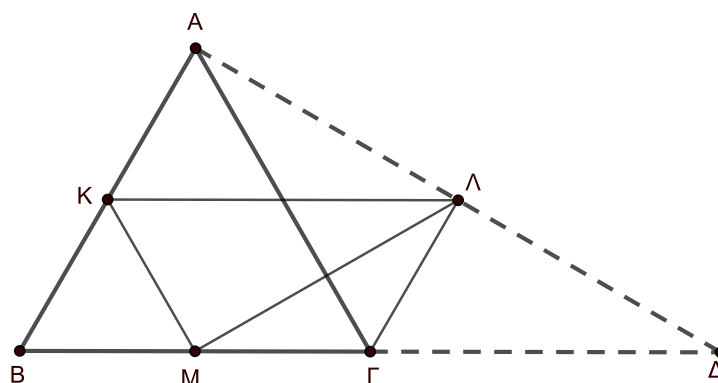


α)



Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $\widehat{B\Lambda\Gamma} = \widehat{B} = \widehat{B\Gamma A} = 60^\circ$

Ισχύει ακόμη ότι $\Gamma\Delta = B\Gamma$ και $B\Gamma = A\Gamma$, άρα $\Gamma\Delta = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{\Gamma\Lambda\Delta} = \widehat{\Delta}$ (1).

Η γωνία $A\Gamma B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, άρα $A\Gamma B = \widehat{\Gamma\Lambda\Delta} + \widehat{\Delta}$ και λόγω της (1) $60^\circ = 2\widehat{\Delta}$ ή $\widehat{\Delta} = 30^\circ$. Οπότε λόγω της (1) είναι και $\widehat{\Gamma\Lambda\Delta} = 30^\circ$. Ισχύει ακόμη ότι:

$$\widehat{B\Lambda\Delta} = \widehat{B\Lambda\Gamma} + \widehat{\Gamma\Lambda\Delta} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

β)

- i. Το $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Delta$, οπότε $K\Lambda \parallel B\Delta$ ή $K\Lambda \parallel M\Gamma$.

Επιπλέον το Γ είναι το μέσο της $B\Delta$, αφού $B\Gamma = \Gamma\Delta$ από υπόθεση και το Λ είναι το μέσο της $A\Delta$, άρα $\Lambda\Gamma \parallel AB$. Το τμήμα KM τέμνει τη μία από τις δύο παράλληλες την AB , άρα θα τέμνει και την άλλη. Δηλαδή τα τμήματα KM και $\Lambda\Gamma$ τέμνονται, οπότε δεν είναι παράλληλα. Έτσι το $K\Lambda\Gamma M$ είναι τραπέζιο.

Το $\Lambda\Gamma$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$ (2)

Το KM ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $KM = \frac{A\Gamma}{2}$ (3)

Επειδή $AB = A\Gamma$, από τις (1), (2) βρίσκουμε ότι $\Lambda\Gamma = KM$, οπότε το τραπέζιο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές.

Για τις βάσεις του έχουμε $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2}$, αφού K και Λ τα μέσα των AB και $A\Delta$ αντίστοιχα,

δηλαδή $K\Lambda = \frac{2 B\Gamma}{2}$ ή $K\Lambda = B\Gamma$, ενώ $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, αφού το M είναι μέσο του $B\Gamma$. Δηλαδή

$K\Lambda = B\Gamma$ και $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ και έτσι η μεγάλη βάση του τραπεζίου είναι διπλάσια της μικρής.

ii. Ισχύουν τα εξής:

- $\widehat{BKM} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $\widehat{AKL} = \widehat{B} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΛ και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $\widehat{AKL} + \widehat{LKM} + \widehat{BKM} = 180^\circ$ ή $60^\circ + \widehat{LKM} + 60^\circ = 180^\circ$, δηλαδή $\widehat{LKM} = 60^\circ$.

Τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ έχουν:

- ΚΛ κοινή πλευρά
- $\widehat{AKL} = \widehat{LKM} = 60^\circ$
- $AK = KM$, διότι $AK = \frac{AB}{2}$ και $KM = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ είναι ίσα, άρα:

$\widehat{KML} = \widehat{K\hat{A}L}$ δηλαδή $\widehat{KML} = 90^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.