ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι: $E_1 = 15 \cdot 25 = 375\ m^2$. Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15+2x$, $25+2x$ και εμβαδόν:

$E_2(x) = (15 + 2x)(25 + 2x) = 375 + 30x + 50x + 4x^2 = 4x^2 + 80x + 375$.

Το εμβαδόν της ζώνης είναι: $E(x) = E_2(x) - E_1 = 4x^2 + 80x + 375 - 375 = 4x^2 + 80x$, $x > 0$

β) Ισχύει ότι:

$E(x) = 500$, δηλαδή $4x^2 + 80x = 500$, οπότε $4x^2 + 80x - 500 = 0$ και διαιρώντας όλους τους όρους με 4 προκύπτει τελικά η εξίσωση $x^2 + 20x - 125 = 0$.

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$

και ρίζες τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5m$.

γ) Είναι: $E(x) < 500$, δηλαδή $4x^2 + 80x < 500$, οπότε $4x^2 + 80x - 500 < 0$ και διαιρώντας όλους τους όρους με 4 προκύπτει τελικά η ανίσωση $x^2 + 20x - 125 < 0$ (1).

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 20x - 125$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-25		5		$+\infty$
$x^2+20x-125$		+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα προσήμου συμπεραίνουμε ότι η ανίσωση (1) αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $-25 < x < 5$. Όμως $x > 0$, οπότε τελικά $x \in (0,5)$.

Εναλλακτικά, για να έχει η ζώνη εμβαδόν μικρότερο από $500m^2$ (δεδομένου ότι δεν αλλάζει το εμβαδόν του κολυμβητηρίου), αρκεί να έχει πλάτος $x < 5$, διότι έτσι το εξωτερικό ορθογώνιο θα έχει μικρότερο μήκος και ίδιο πλάτος, άρα μικρότερο εμβαδόν. Οπότε, για κάθε $0 < x < 5$, ισχύει $E(x) < 500m^2$.